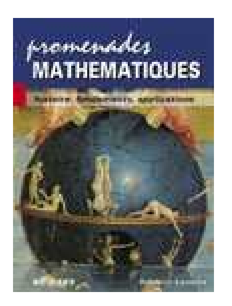


Petite histoire de l'Arithmétique

L'arithmétique, comme son nom l'indique (*arithmos* = …), est l'étude des nombres. Les nombres sont entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers relatifs $\mathbb{Z}$, ou rationnels $\mathbb{Q}$; ils peuvent également être réels $\mathbb{R}$, voire complexes $\mathbb{C}$, voire pire (quaternions, octonions, etc.) mais le traitement de ces derniers ne fait pas à proprement parler partie de l'arthmétique. La théorie des nombres est la même chose, mais en plus relevé…

Tout au long de son développement historique, ses frontières avec l'algèbre et l'analyse ont été mouvantes et souvent imprécises ; une sèparation assez naturelle s'est établie chez les Grecs entre arithmétique pratique (le calcul ou *logistique* des grecs) et arithmétique théorique, que l'on retrouve toujours.

La première comprend les diverses numérations parlées et écrites, la représentation des fractions et les techniques opératoires relatives aux quatre opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division. Les numérations parlées remontent chez tous les peuples aux époques les plus reculées. Aristote remarquait déjà que la plupart des peuples comptaient par dizaines. Cependant, on trouve dans plusieurs idiomes, le grec par exemple, des restes d'une base 5 et dans d'autres, le français notamment, des vestiges d'une base 20.

> **Chiffre** : du latin médiéval *cifra* "zéro", de l'arabe *sifr* "vide". Chacun des caractères qui représentent les nombres.

1. Systèmes de numération écrite

1-1 : Les ancètres

Il y a quelque 40 000 ans, lorsqu'ils commencèrent à se civiliser, les premiers *Homo sapiens* ne connaissaient pas les chiffres. Il est probable qu'ils commencèrent à désigner des quantités avec leurs doigts puis qu'ils pensèrent à les « écrire » quelque part : certains signes peints font penser à des comptages de nombre d'animaux ou de lunaisons ou Dieu seul sait quoi…

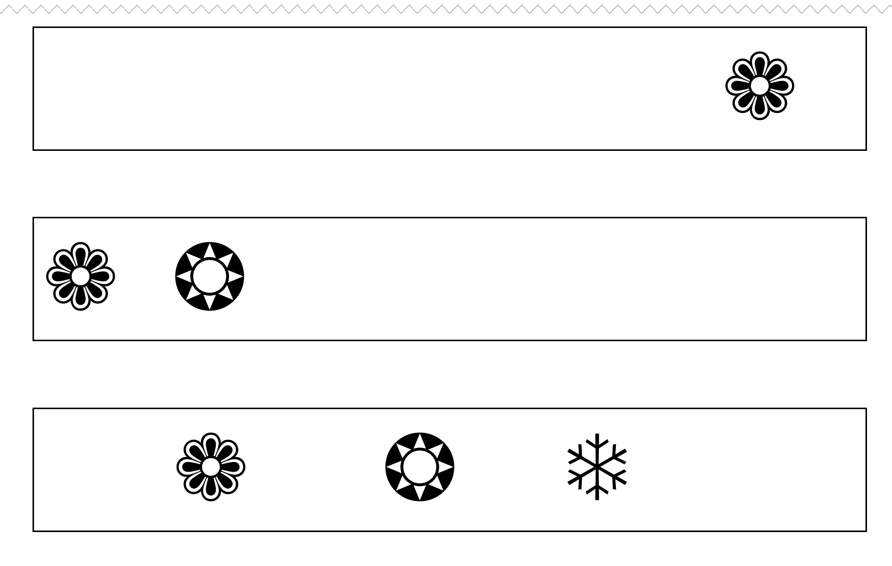
En tout cas on peut voir sur un os vieux de 10 000 ans l'image d'un sanglier avec 17 traits. Le chasseur y décrit certainement ses chasses.

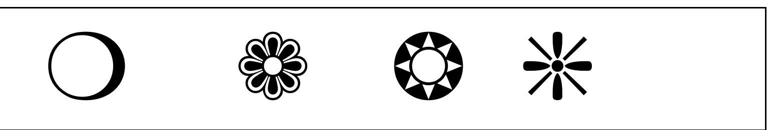


Cette technique fut longtemps employée car facile à réaliser et facile à comprendre. Mais avec l'usage, nos ancêtres se rendirent certainement compte qu'avec de nombreux traits des erreurs apparaissent car notre capacité visuelle est limitée. Lorsque le nombre de traits dépasse 4, tout se brouille. On ne sait plus très bien où l'on en est. Cette méthode ne permet pas de recenser de grandes quantités et cela reste toujours vrai.

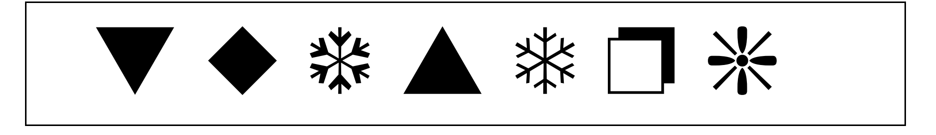
D'après Stanislas Dehaene (La bosse des Maths, éd. Odile Jacob), l'homme, de même que la plupart des animaux, dispose d'un accumulateur intégré qui lui permet de « peser » des quantités : deux zones spécialisées du cerveau sont sollicitées. Dans une zone du cortex frontal on compte de 1 à 4 directement ; lorsque les quantités considérées deviennent plus importantes une zone plus profonde intervient et prend le relais : on va s'attacher à estimer le résultat et non à compter directement.

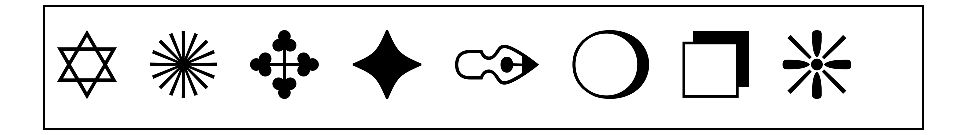
Un petit test : essayez, au premier coup d'oeil, de dire combien il y a de symboles affichés. De 1 à 4, ça va tout seul.



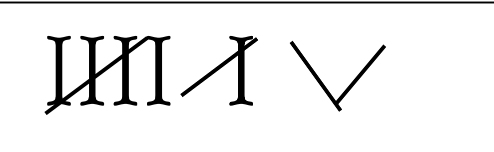


Au-delà de 4, tout devient confus. Il faut se mettre à compter. Combien de temps mettez-vous ?





La solution est venue il y a quelques milliers d'années : il s'agit d'éviter d'aligner plus de quatre traits successifs. Le nombre 5 devient quatre entailles traversées par une barre. Puis une barre barrée puis un V.



Pour les autres nombres, on ajoute des traits que l'on barre, etc. ce que l'on fait encore (par exemple pour compter des bulletins de vote).



1-2 : Egypte

La numération écrite égyptienne est fondée sur la base 10. Lorsqu'il s'agit de ce que l'on pourrait appeler la numération gravée (hiéroglyphes), chaque puissance de 10 possède un signe propre :

unité (un baton) ,

dizaine ,

centaine ,

millier (une fleur de lotus),

dizaine de mille (un doigt montrant le ciel),

centaine de mille (un tétard, symbole du non-dénombrable : il y a beaucoup de têtards au bord du Nil),

million (le dieu de l'infini) .

Pour représenter un nombre on accole les symboles sans ordre bien établi, avec parfois des simplifications :

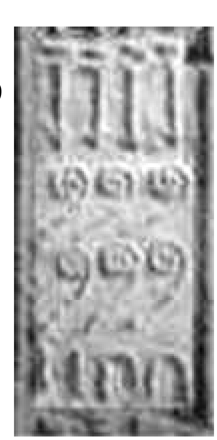
Sur cette photo, les hiéroglyphes symbolisent le chiffre 4622.

Quatre fleurs de lotus = 4 milliers = 4000

Six spirales = 6 centaines = 600

Deux U à l'envers = 2 dizaines = 20

Deux barres à gauche = 2 unités = 2



 représente 400 000.

L'écriture hiératique amène également diverses solutions qui font penser aux numérations alphabétiques ultérieures (grecque, hébraique et arabe).

En général les Egyptiens n'utilisent pas les fractions générales mais les quantièmes ou fractions unitaires : une fraction unitaire est une fraction avec 1 au numérateur et n'importe quoi au dénominateur. N'importe quel quotient de nombres entiers peut s'écrire sous cette forme : par exemple $\frac{2}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$; pour y arriver la démarche est assez compliquée, mais les scribes égyptiens disposaient de tables et avaient une grande dextérité dans ce domaine.

> Arriverez-vous à décomposer $\frac{2}{45}$ sous forme de somme de deux fractions unitaires dont les dénominateurs sont différents (sinon c'est trop facile…)

La multiplication s'effectuait par doublements successifs.

1	15
2	30
4	60
8	120

Par exemple on veut multiplier 15 par 13, on dispose les opérations en colonne : d'un côté les multiples de 2, de l'autre 15 fois les puissances de 2.

Comme $13=1+4+8$, on a $13\times 15=15+60+120=195$

De tels procédés ont duré très longtemps, par exemple dans la paysannerie russe. Evidemment là encore de nombreux raccourcis sont possibles (multiplier par 10 est évidemment assez simple…). Pour la division on applique la même méthode mais à l'envers : on divise le dividende par 2 aussi longtemps que nécessaire et on recompose le résultat. Evidemment l'utilisation des fractions unitaires n'était pas pour faciliter la tâche.

La multiplication et la division nécessitaient de disposer de tables de multiplication par 2. On en trouve dans le papyrus Rhind, où figurent les doubles des inverses des impairs successifs de 3 à 101 :

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}\ ;\ \frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}\ ;\ \frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}\ ;\ \text{etc.}$$

Malgré les grandes complications entrainées par l'emploi **exclusif** des fractions unitaires, ceux-ci seront utilisés par les grecs et se retrouveront à Byzance puis dans tout l'Occident pendant très longtemps.

1-3 : Babylone

La numération savante babylonienne (qui n'est pas celle utilisée au quotidien), à peu près contemporaine de la numération égyptienne (1800 av. J. C. environ) est une des plus remarquables. Son influence est

encore très forte dans les mesures de temps, d'angles, d'arcs. Elle utilise d'une part la base 10, mais pour les entiers inférieurs à 60.

Pour ces nombres elle procède comme pour les hiéroglyphes et emploie le signe ∇ pour les unités et le signe ≺ pour les dizaines. Ces deux symboles se forment chacun d'un seul coup de stylet sur la tablette d'argile et permettent une écriture rapide ; par exemple 34 s'écrit ≺≺≺ ∇∇∇ / ∇ .

Au delà de 59 l'écriture devient une écriture de position à base 60 où le symbole pour 60 est toujours ∇ : 61 s'écrit alors ∇∇ , 365 s'écrit ∇∇∇ ∇∇∇ / ∇∇∇ ∇∇ .

Le manque de symbole pour le zéro se faisait cruellement sentir : 61 = ∇∇ et 3601 = ∇ ∇ (60^2+1) ne se distinguent que par l'écartement plus ou moins grand entre les « chiffres ». Le zéro apparaîtra néanmoins vers la fin de l'époque grecque classique, vers 300 av. J. C.

Les fractions se représentaient assez bien dans ce système avec des dénominateurs sous forme de puissances de 60. Par exemple on trouve sur une tablette la séquence ∇ ≺≺ ∇∇∇ ≺≺≺ / ∇ ≺≺ ∇ ≺ , soit 1, 24, 51 et 10 qui peut s'interpréter par $60^3+24\times 60^2+51\times 60+10$ mais également $60^2+24\times 60^3+51+\frac{10}{60}$ et qui en fait est $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ (en fait une approximation, excellente, de $\sqrt{2}$).

La numération de position babylonienne est dons une numération de position à virgule flottante. Elle a été adoptée partiellement par les aastronomes grecs : ceux-ci, écrivant les entiers à leur manière, utilisent la notation sexagésimale pour la partie fractionnaire. Ainsi le géographe et astronome Claude Ptolémée (2ème s. ap. J. C.) note $2596+\frac{14}{60}+\frac{24}{60^2}$ de la façon suivante : $,\beta\varphi\varsigma\bar{\varsigma}\iota\delta'\kappa\delta''$.

Les astronomes arabes copièrent les grecs en utilisant leur alphabet propre, les astronomes occidentaux firent de même, mais en utilisant les chiffres arabes : le nombre ci-dessus devient alors 2 596 ° 14 ' 24''. Certains astronomes (particulièrement au 16ème siècle) utilisent même l'écriture sexagésimale dans les deux sens, ascendant comme descendant. Le nombre précédent se représente alors par : 43' 16° 14' 24''. L'existence de ces nombres physiques est très pratique et l'existence de tables numériques calculées dans ce système retarderont beaucoup l'apparition des nombres décimaux.

Le procédé égyptien de multiplication par duplications successives évite pour les entiers tout effort de mémorisation ; au contraire la numération sexagésimale, en raison de la grandeur de la base, en demande beaucoup : d'où les nombreuses tables numériques babyloniennes. En particulier, comme ne peuvent être représentées et exprimés que les nombres de la forme $\frac{a}{60^n}$ où a et n sont entiers, il importe de connaître les nombres entiers qui admettent un inverse de cette sorte et de dresser des tables de ces inverses. Beaucoup de tablettes contiennent de tels répertoires.

Les bases de numération
Diverses sortes de bases ont été utilisées : 5, 10, 12, 20, 60 et même 2 (quelques populations de Nouvelle-Guinée) ou 3 (certaines tribus indiennes ou africaines). Il y a même une tribu qui comptait en base 27 (tous les doigts et orifices du corps humain y passaient…). D'une manière générale si on fixe une base B, on disposera de B symboles distincts représentant les nombres de 0 à $B-1$ et un nombre s'écrira sous la forme d'un polynôme de B : $N=aB^0+bB^1+cB^2+\ldots$ Par exemple en base 2 on dispose de 2 symboles : 0 et 1 et un nombre s'écrit par exemple

$$1101110 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$$

ce qui permet de donner sa valeur décimale, ici

$$\overline{1101110} = 64 + 32 + 8 + 4 + 2 = 110\ .$$

A l'inverse, connaissant la valeur décimale, comment obtenir la valeur dans la base B ¿

Prenons par exemple 321 et cherchons son écriture en base 3 : les puissances successives de 3 sont 1, 3, 9, 27, 81, 243, … On voit de suite qu'il faut

1 fois 243, reste 78,

0 pour 81,

2 fois 27, reste 24,

2 fois 9, reste 6,

2 fois 3, reste **0**.

321	3				
0	107				
	2	35			
		2	11		
			2	3	
				0	1

Notre nombre s'écrit donc 102220. En fait il ne s'agit ni plus ni moins de faire les divisions successives de 321 par 3, les restes donnant le symbole de la place (en gris les restes qui seront le chiffres du nombre). Maintenant avec l'informatique on utilise souvent la base Hexadécimale (16) et on rajoute les symboles suivants à 0, 1, 2,…, 9 :

$\mathbb{A}$ (10) $\mathbb{B}$ (11) $\mathbb{C}$ (12) $\mathbb{D}$ (13) $\mathbb{E}$ (14) $\mathbb{F}$ (15)

Par exemple $\mathbb{FF}$ représente le nombre 15.16 + 15 = 15.17 = 255. Ceci représente en fait un **octet** et s'écrit en base 2 (binaire) sous la forme

$$11111111 = 1.2^7 + 1.2^6 + \ldots + 1.2^1 + 1.2^0 = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255\ .$$

En fait c'est assez simple : puisque 1111 vaut 15, lorsqu'on écrit chaque paquet de quatre 1 on a $\mathbb{F}$ à chaque fois. Par exemple l'octet 1010 1100 vaut en hexa 8 + 2 = $\mathbb{A}$ pour le premier bloc et 8 + 4 = $\mathbb{C}$ pour le deuxième bloc ; on a donc 1010 1100 = #$\mathbb{AC}$ (le dièse # sert à indiquer que l'on est en Hexadécimal).

Vous recevez le message codé suivant de votre frère qui s'est perdu au fin fond du Sahara : « Plus d'argent, envoie moi un BAC, je te le rendrai quand je serai à DAFEB ».

Combien devez vous lui envoyer sachant qu'il faut d'abord soustraire les deux nombres, diviser le résultat par 2 et convertir le tout en euros (votre frère ne compte qu'en Gloubi-Boulga (1 GB = 0,11 €)) …

1-4 : Grèce et Rome

Les Grecs puis les Romains utilisaient deux systèmes différents : l'écriture des nombres à l'aide de lettres et le calcul à l'aide d'outils variés. Le mot calcul vient du latin *calculus* qui signifie petits cailloux, utilisés dans le calcul courant. Les deux systèmes sont néanmoins fondés sur l'écriture alphabétique : la numération attique procède comme l'écriture hiéroglyphique :

I	Γ	Δ	⌈Δ	H	⌈H	X	⌈X	M	⌈M
1	5	10	50	100	500	1 000	5000	10 000	50 000

L 'écriture savante, utilisée par tous les grands mathématiciens, les calculateurs byzantins et les astronomes, se rapproche de l'écriture égyptienne hiératique. Elle utilise 27 lettres pour écrire tous les entiers jusqu'à 10 000, la *myriade*.

unités :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'
dizaines :	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	o'	π'	ϙ'
centaines :	100	200	300	400	500	600	700	800	900
	ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	λ'
milliers :	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
	$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\theta$

Au-delà de 10 000, on décompose en myriades : 10^4, myriades secondes 10^6, myriades troisièmes 10^{12}, etc. Les myriades sont indiquées soit par la lettre M, soit au moyen de points. Archimède et Appolonios ont fabriqué des systèmes pour écrire les très grands nombres (voir le problème des Bœufs d'Helios). Ces systèmes ont été repris par divers peuples à écriture alphabétique, les Hébreux et les Arabes entre autres.

Pour les fractions les Grecs utilisent les quantièmes égyptiens, mais également les fractions générales (vers 300 av. J. C.) : la fraction $\frac{121}{16}$ s'écrit $\frac{\iota\varsigma}{\rho\kappa\alpha}$, le dénominateur étant écrit au-dessus du numérateur. La notation grecque évite l'usage du zéro qui apparaîtra néanmoins avec l'introduction du système sexagésimal babyloniens : dans les papyrus de l'époque ptolémaïque, il prend diverses formes :

° ō °   ō   >ō<

1-5 : Chine

Les Chinois ont disposé très tôt d'un système franchement performant : à l'origine (peut-être 3000 av. J. C., mais plus sûrement 1500 av. J. C. sur des monnaies) sont créés des chiffres à la manière arabe, lesquels seront évidemment traduits en idéogrammes. On a alors un système d'écriture « officielle » ainsi qu'un système de calcul utilisé sur des « tables à jonchet » ou « échiquiers » ainsi que dans l'écriture « non officielle ». Les caractères habituellement utilisés sont :

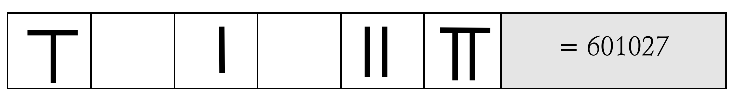
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

L'écriture se faisait suivant un système mixte : … –chiffre–mille–chiffre–cent–chiffre–dix–chiffre qui ressemble fortement au nôtre, –deux–mille–trois–cent–cinquante–quatre par exemple, et permettait donc d'écrire à peu près n'importe quoi de manière simple.

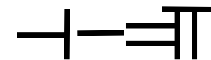
Pour le calcul effectif le système reposait sur une autre série de symboles qui devaient être au début constitués de batonnets disposés sur un échiquier et qui fut remplacé par des fiches ou jonchets (attesté en 200 av. J. C.) :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	II	III	IIII	IIIII	T	╥	╥I	╥II

Tant qu'on travaillait sur l'échiquier il n'y avait pas de difficulté : la colonne indique la puissance de dix correspondante, une case vide étant le zéro qui n'existait pas en tant que tel.



L'inconvénient, dès que l'on veut passer à l'écriture hors de l'échiquier est celui des colonnes vides : soit on dessinait quelques cases, soit encore on utilisait les mêmes symboles mais orientés différemment :

Le 6, le 1 et le 2 sont couchés (puissances impaires de 10) 

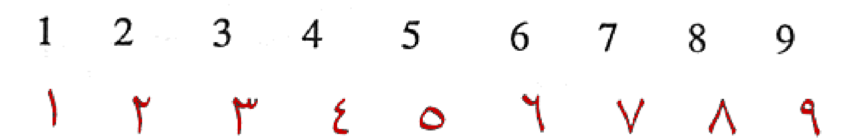
Tout ceci reste évidemment du domaine du bricolage, mais les calculs se faisant essentiellement sur l'échiquier, ça n'avait peut-être pas beaucoup d'importance : les réalisations calculatoires des Chinois sont en effet bien supérieures à celles de tous les autres peuples connus, en tout cas avant la généralisation des chiffres « arabes » et de la numération de position.

1-6 : La numération de position

En fait, dans le domaine des chiffres, les grands bouleversements qui allaient rendre le calcul accessible à tous sont survenus entre le 4ème siècle de notre ère et le 8ème siècle : l'invention des chiffres « arabes » (en fait indiens), de la numération de position en base dix et surtout du zéro.



Les Arabes ont servi de courroie de transmission depuis l'Inde jusqu'en Occident au moment des croisades. Malgré tout les chiffres arabes et surtout la numération de position trouvèrent un terreau fertile car la tradition babylonienne du calcul était justement basée sur cette numération de position.



Vers l'an 1000, le pape Sylvestre II (Gerbert d'Aurillac) a mis tout le poids de son autorité pour faire reconnaître ce système, non sans peine. Selon Georges Ifrah, il a été très mal accueilli, car le conservatisme de l'Europe faisait que les chiffres romains constituaient pour eux les piliers de la civilisation dont ils étaient les héritiers. Se considérant les fidèles descendants des romains, ils ne pouvaient utiliser d'autre chose que les chiffres grecs ou les chiffres romains.

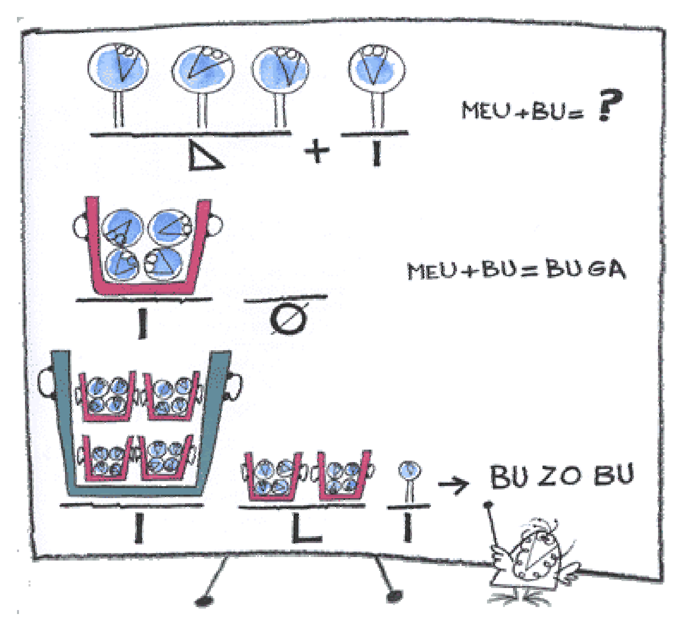
Mais il manque toujours le zéro. Avant le zéro, quand un marchand d'esclaves achetait cinq esclaves qu'il revendait par la suite, il disait : il me reste cinq moins cinq esclaves. On était incapable d'exprimer le nul, le rien, par un signe symbolique. Georges Ifrah parle ainsi de l'héritage du zéro :

> « Le zéro a été le véritable Big Bang pour l'esprit de l'homme. Il a modifié radicalement le mode de nourriture intellectuelle et de pensée de l'être humain. À partir du zéro, plus rien ne pouvait être comme avant. Sans le zéro, avant le zéro, on avait des bribes de sciences, des bribes de mathématiques. On avait des prémisses en mécanique, par exemple - puisque les Grecs connaissaient beaucoup de choses -, mais ça ne suffisait pas pour en faire une science contemporaine. »

L'apparition du zéro dans l 'écriture scientifique chinoise ne se fera d'ailleurs pas avant le 13ème siècle alors que les Chinois connaissaient déjà la numération arabe, preuve s'il en était besoin que la nécessité n'en était pas si évidente. Une autre caractéristique intéressante est l'écriture des nombres : horizontale et de droite à gauche et non verticale comme le voudrait l'écriture « normale ». C'est évidemment une traduction directe de l'écriture sur l'échiquier.

Cette écriture a-t-elle été transmise aux hindous ? Pour ma part je le pense fortement : l'écriture *brâhmi* des nombres, àl'origine des chiffres « arabes », se faisait de manière semblable aux hiéroglyphes, et ceci jusqu'au 6[ème] siècle de notre ère ; par ailleurs des découvertes récentes effectuées dans le désert de Gobi ont montré que le commerce Asie Centrale - Inde - Chine était fort actif depuis de longs siècles. On voit mal comment les divers systèmes de numération ne se seraient pas interconnectés.

La gloire des Indiens est en fait double : le système chinois est performant mais pas tellement quand il s'agit d'écrire rapidement ; l'apparition de symboles distincts, détachés de tout contexte et réalisables d'un seul trait de pinceau ou de crayon simplifie grandement la graphie. Par ailleurs l'apparition et l'utilisation du zéro donne toute sa puissance au système. Une fois encore l'interpénétration des civilisations et des idées a permis une réalisation dont l'ampleur des conséquences fut proprement incalculable : notre monde moderne sera le fruit de la rencontre d'un outil de calcul performant avec la civilisation judéo-chrétienne ouverte vers l'avenir.



Voir http://membres.lycos.fr/villemingerard/Numerati/NumHisto.htm

Sinon, vous avez plein de chiffres ici :

http://pedroiy.free.fr/chiffres/

Il existe de très nombreux sites traitant de l'évolution de la numération : par exemple

http://www.chez.com/histoiredechiffres/histoiredechiffres.htm

http://www.math93.com/zero.htm

ou encore ce site sympa : http://collegejmonnet.free.fr/maths/histmath.html

ou ce très joli site réalisé par des élèves : http://lechiffre.free.fr/page_som.html

Egalement un très beau livre à lire sur la question : **L'Empire des nombres** de Denis Guedj, éd. Gallimard (Découvertes), mais surtout l'ncontournable : **Histoire Universelle des Chiffres**, Georges Ifrah, Coll. Bouquins, R. Laffont.

1-7 : Bref historique

35 000 à 20 000 av. J.-C. : Apparition des premiers os entaillés de la Préhistoire.

5000 av. J.-C. : Les Sumériens développent une numération parlée de base 60.

3300 à 3200 av. J.-C. : Apparition des chiffres sumériens et proto-élamites, tous deux considérés comme les plus anciens systèmes de numération connus.

3000 à 2900 av. J.-C. : Apparition de la numération hyéroglyphique égyptienne.

2700 av. J.-C. : Apparition des chiffres cunéiformes sumériens.

1900 à 1600 av. J.-C. : Les Babyloniens développent le premier système de numération de position connu à ce jour. Utilisant la base 60, ce système ne comporte pas encore de zéro.

Fin du XIVe siècle av. J.-C. : Apparition des plus anciens chiffres chinois connus.

IIIe siècle av. J.-C. : Invention du zéro par les Babyloniens. Par contre, le zéro babylonien n'est pas conçu comme un nombre pouvant être utilisé lors de calculs. Il sert simplement à exprimer l'absence d'unités d'un certain ordre.

IIIe siècle av. J.-C. : Apparition des chiffres *brâhmi* (indiens). Les chiffres de ce système sont considérés comme les précurseurs des neuf chiffres de notre système de numération moderne.

IVe siècle de notre ère : Naissance de la numération décimale indienne de position, ancêtre de notre numération écrite actuelle. On applique aux chiffres *brahmi* (indiens) le principe de valeur de position. Aux neufs premiers chiffres, on ajoute également un signe en forme de petit cercle ou de point représentant le zéro.

458 : Première apparition du zéro dans un traité de cosmologie indien, le Lokavibhâga, daté du lundi 25 août 458.

Fin du VIIIe siècle : Introduction de la numération décimale positionnelle et du zéro dans la culture islamique.

IXe siècle : Introduction du zéro en Espagne, par l'entremise des Arabes.

972 à 982 : Au cours d'un séjour en Espagne, le moine Gerbert d'Aurillac (futur pape Sylvestre II) est initié aux chiffres "arabes".

XIIe siècle : Introduction du signe -zéro- d'origine indienne en Europe occidentale.

XIIe au XVe siècle : En Europe occidentale, la graphie des chiffres "arabes" se stabilise et donne naissance aux chiffres tel que nous les connaissons aujourd'hui.

1489 : Le mathématicien allemand Johann Widmann d'Eger introduit les signes $+$ et $-$ pour exprimer l'addition et la soustraction. Auparavant, on utilisait les lettres p (piu) et m (minus).

1557 : Le mathématicien anglais Robert Recorde introduit le symbole de l'égalité $=$.

1608 : Le Néerlandais Willebrord Snellius développe la notation à virgule pour représenter les nombres décimaux.

1631 : Le mathématicien anglais Thomas Hariot introduit les symboles $<$ et $>$.

1632 : Le mathématicien anglais William Oughtred introduit le symbole de la multiplication : $\times$.

1795 : Le 18 germinal, an III (7 avril 1795), est adoptée la loi sur le système métrique en France. Cette loi donne la première définition du mètre et fixe la terminologie actuelle des unités de poids et mesures : centimètre, mètre, kilomètre, gramme, décigramme, centigramme, kilogramme, etc.

2. Calculer

Depuis toujours, l'être humain a exploité un outil à la portée de la main : les doigts.

2-1 : Les bases

C'est notre première machine à compter et à calculer. Avec cinq doigts dans chaque main, on compte naturellement par groupe de cinq ou de dix. L'anatomie de nos deux mains serait donc à l'origine de la base 10 ainsi que de notre système métrique : **10 mm** font **1 cm** et ainsi de suite.

Certains, en plus des doigts, ajoutent aussi les dix orteils. On compte alors par vingtaines : c'est la base 20. L'expression "quatre-vingts" reste d'ailleurs un vestige de cette vieille tradition. Moins connue, l'expression "quinze-vingts" désigne un hôpital de la ville de Paris fondé par Saint-Louis, à proximité du Louvre. À l'origine, il était destiné à recevoir 300 aveugles (15 fois 20).

Avec le temps, l'usage des doigts a permis toutes sortes de calculs. Georges Ifrah explique comment on peut effectuer toutes sortes d'opérations arithmétiques avec les doigts :

« Pour faire la multiplication de 8 par 9, il sufffit de mettre mentalement 8 dans une main et 9 dans l'autre. Comme on a dit 8 pour cette main, on abaisse 3 doigts, soit 8 − 5 doigts. Dans l'autre main, on fait 9 − 5 doigts, on abaisse donc 4 doigts. On prend toujours le complément par rapport à 5, puisqu'on n'a que 5 doigts dans chaque main. Ensuite, on compte les doigts baissés dans les deux mains : 3 + 4 = 7. Ce sont les dizaines, donc 70. On compte les doigts levés et on les multiplie ensemble : 2 × 1 = 2. Le produit donne les unités. En additionnant les dizaines et les unités, 70 + 2, on obtient 72. »

Essayez de faire 9 x 9 de la même manière…

Nombre : début du XIIe siècle, du latin *numerus.* Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir. *À l'origine, et dans le cas le plus simple des nombres naturels (*1, 2, 3, 4...) : symbole caractérisant une unité ou une collection d'unités considérée comme une somme.

Le plus grand nombre accepté en lexicographie dans le système des puissances de 10 est le centillion. Ce nombre correspond à la centième puissance de 1 million, soit le chiffre 1 suivi de 600 zéros.

Le nombre 10 à la puissance 100 est appelé un **googol**. Le nombre 10 élevé à la puissance un googol est appelé un **googolplex**. Selon certains modèles théoriques proposés en physique, le nombre d'électrons existant dans l'univers serait de 10 à la puissance 87. Le nom de googol a été suggéré par le neveu de neuf ans du mathématicien américain Edward Kasner.

Base : XIIe siècle, du latin basis, mot grec "marche, point d'appui". Nombre qui sert à définir un système de numération, de référence, de logarithmes, etc. La base du système décimal est dix. (Petit Robert)

Systèmes de numération utilisés	
Base 2	Système binaire
Base 3	Système ternaire
Base 4	Système quaternaire
Base 5	Système quinaire
Base 7	Système septénaire
Base 8	Système octal
Base 10	Système décimal
Base 12	Système duodécimal
Base 16	Système hexadécimal
Base 20	Système vigésimal
Base 60	Système sexagésimal

* Le mathématicien Gottfried Leibniz (1646-1719) était un grand promoteur du système binaire (base **2**). Pour lui, le chiffre 1 représentait Dieu, tandis que le chiffre 0 correspondait au Vide.

* À l'heure actuelle, seules quelques tribus de la Terre de Feu et d'Amérique du Sud utilisent encore les systèmes ternaire et quaternaire (bases **3** et **4**).

* Très ancienne, la base **5** est habituellement combinée avec les bases **10** ou **20**. La base **5** est encore utilisée par les populations parlant la langue Saraveca en Amérique du Sud. En quelques endroits d'Afrique, on utilise encore les bases **6** et **12**.

* Les Mayas utilisaient la base **20**, tandis que les Babyloniens utilisaient la base **60**. La mesure du temps et des angles est un vestige de ce système.

> Quelques problèmes (http://mathcentral.uregina.ca/)
>
> 1. Tout nombre de dix chiffres formé en alignant les nombres 0, 1, 2, ..., 9 dans un ordre quelconque est un multiple de 3.
>
> 2. Loin dans l'espace se trouve un petit soleil autour duquel gravite la planète Kuku, dont les habitants sont des amphibiens jaunâtres qui ont cinq mains de deux millions de doigts chacune. Ils font l'arithmétique en base dix millions, plutôt qu'en base dix comme nous. Notre problème est une adaptation terrestre d'un de leurs problèmes d'arithmétique similaire au problème ci-haut :
>
> Soit N, un nombre de 70 000 000 de chiffres formé en alignant les nombres 0000000, 0000001, 0000002, ..., 9999998, 9999999 dans un ordre quelconque.
>
> Démontrez que N est un multiple de 239.

Plus près de nous, jusqu'à la Révolution Française, l'argent se comptait en Livres, Deniers, Sols avec des taux de conversion très anciens :

anciennement la **livre**, monnaie de compte, correspondait à un poids d'argent d'une livre (environ 500 grammes). Charlemagne ayant ordonné que le **sou** d'argent soit précisément la vingtième partie de 12 onces, on s'accoutuma à regarder, dans les comptes, 20 sous comme une livre. C'est à l'avènement des Valois que le terme de sou s'appliqua à la division de la livre ; la livre de Paris (Parisis) contenait 20 sous, soit 300 **deniers** ou 600 **oboles** jusqu'en 1667. Elle fut supplantée par la livre Tournoise (frappée à Tours) qui valait 20 sous, soit 240 deniers ou 480 oboles.

1 livre = 20 sous (ou 20 sols),
1 sou = 12 deniers,
1 obole = 1/2 denier,
1 pistole = 10 livres,
1 liard = 3 deniers.

On se doute que les calculs pouvaient être laborieux. A vous de jouer :

> Petit Jean doit ramener au curé et au viguier de son village un cochon de lait à 2 livres 10 sous et 3 centaines de grenouilles à 3 sols 6 deniers le cent. Il paye en sous de Paris et se fait rembourser en sous de Tours. Combien chacun paiera sachant que le viguier prend les deux tiers et le curé un seul tiers ?

Quelques prix anciens : http://gperilhous.free.fr/MGenealogie/Cours/Annexes/Prix.html

2-2 : Multiplier

Multiplication : opération consistant, dans le cas de deux entiers a et b, à déterminer un entier c égal à la somme de b termes égaux à a.

On étend sans grande difficulté cette définition à d'autres types de nombres comme les fractions. Pour les nombres réels la multiplication effective est irréalisable dans la pratique : par exemple si on multiplie π et $\sqrt{2}$, on obtient le nombre $\pi\sqrt{2}$ qui n'a pas de nom particulier.

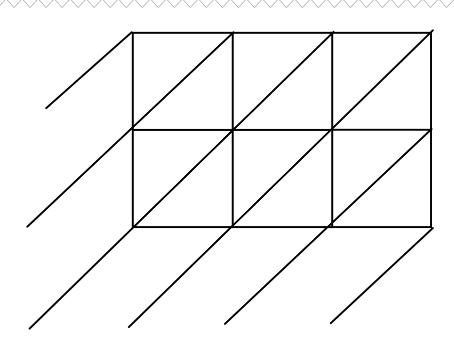
2-3 : La multiplication arabe

On est tellement habitué à notre disposition pour opérer les multiplications que l'on en a oublié les autres. Par exemple on

a la disposition européenne à gauche et la disposition arabe à droite.

```
   427
×   38
 3 416
 12 81
16 226
```

Si vous êtes observateur vous avez trouvé comment ça marche… Alors faites la multiplication 958 x 76 sur la grille suivante…



Quel est l'avantage de cette disposition ?

2-4 : La multiplication chinoise

Pour simplifier nous écrivons les chiffres à l'occidentale… Les calculs se faisaient évidemment sur l'échiquier.

Dans cet exemple on multiplie 247 par 736 : les nombres sont disposés comme suit avec une réserve de deux cases à droite du multiplicande.

			2	4	7	Multiplicateur
						Inscription des résultats partiels
	7	3	6			Multiplicande

La séquence se déroule en trois étapes (remarquez l'importance du positionnement initial) :

1. Multiplication de 736 par 200

			2	4	7	Multiplicateur
1	4					Multiplication de 700 par 200 (= 140 000)
	7	3	6			Multiplicande

puis

			2	4	7	Multiplicateur
1	4	6				Multiplication de 30 par 200 (= 6 000)+ ajout

	7	3	6			Multiplicande

enfin

			2	4	7	Multiplicateur
1	4	7 (6+1)	2			Multiplication de 6 par 200 (= 1 200) + ajout (retenue)
	7	3	6			Multiplicande

2. Multiplication de 736 par 40

				4	7	On retire le 2 du multiplicateur car inutile
1	4	7	2			
		7	3	6		Décalage du multiplicande d'une case à droite

puis

				4	7	Multiplicateur
1	7	5	2			Multiplication de 700 par 40 (= 28 000) + ajout
		7	3	6		Multiplicande

puis

				4	7	Multiplicateur
1	7	6	4			Multiplication de 30 par 40 (= 1 200) + ajout
		7	3	6		Multiplicande

enfin

				4	7	Multiplicateur
1	7	6	6	4		Multiplication de 6 par 40 (= 240) + ajout
		7	3	6		Multiplicande

3. Multiplication de 736 par 7

					7	On retire le 4 du multiplicateur car inutile
1	7	6	6	4		
			7	3	6	Décalage du multiplicande d'une case à droite

					7	Multiplicateur
1	8	1	5	4		Multiplication de 700 par 7 (= 4 900) + ajout
			7	3	6	Multiplicande

					7	Multiplicateur
1	8	1	7	5		Multiplication de 30 par 7 (= 210) + ajout
			7	3	6	Multiplicande

					7	Multiplicateur
1	8	1	7	9	2	Multiplication de 6 par 7 (= 42) + ajout
			7	3	6	Multiplicande

La division quand à elle se faisait de la même manière mais à l'envers en posant le diviseur tout en bas et le dividende sur la ligne moyenne. Le quotient, qui se plaçait en haut, s'obtenait en enlevant au fur et à mesure les jonchets équivalents aux produits partiels.

L'échiquier avait une utilisation inattendue : on pouvait grâce à lui résoudre des équations et des systèmes d'équations algébriques à plusieurs inconnues ; le *Jiu zhang suan shu* (Art du Calcul en Neuf Chapitres), datant de 200 ap. J. C. en donne de nombreux détails. Chaque colonne verticale était associée à une équation et chaque ligne aux coefficients ; par ailleurs on attribuait des jonchets noirs aux nombres

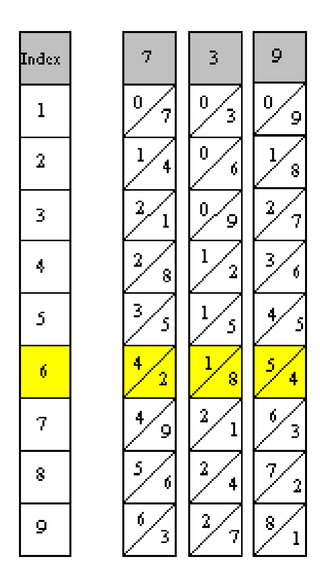
négatifs (en chinois : « *fu* » = trompeurs) en remplacement des jonchets ordinaires réservés aux nombres positifs (en chinois : « *zheng* » = corrects).

Par exemple le système $\begin{cases} 2x-3y+8z=32 \\ 6x-2y-z=62 \\ 3x+21y-3z=0 \end{cases}$ s'écrivait (on a mis en gras et italique les négatifs) :

x	2	6	3
y	***3***	***2***	21
z	8	***1***	***3***
	32	62	

La résolution se faisait alors assez aisément avec un jeu subtil des jonchets.

2-5 : Multiplier automatiquement



C'est le noble écossais John Neper (ou Napier, 1550-1617), l'inventeur des logarithmes, qui a conçu le premier dispositif construit dans le but de simplifier cette opération.

Sa création, appelée **bâtonnets** ou **osselets de Neper** n'est en somme qu'une disposition physique sur des bâtons de la table de multiplication des chiffres de 1 à 9 (table de Pythagore). En effet, chaque bâton est associé à la table de multiplication d'un des chiffres par tous les autres. Chacune des sections carrées associées à un de ces produits est séparé en deux par une ligne diagonale. Dans la partie supérieure est inscrit le chiffre des dizaines et les unités sont inscrites dans la partie inférieure.

Cette réalisation permettait à l'utilisateur de s'épargner l'apprentissage des tables de multiplications, car maintenant, le calcul de chacun des produits partiels par un chiffre était réduit à quelques additions. En effet, la multiplication de 739 par 326, par exemple, était réalisable de la façon suivante. On doit d'abord calculer le produit partiel de 739 par 6, par 2, puis par 3. En disposant côte à côte les bâtonnets associés aux chiffres 7, 3 et 9, on peut lire très facilement tous les produits partiels, car les diagonales semblent intuitivement associer les dizaines de la table d'un chiffre à une retenue sur l'ordre décimal suivant. On lit donc

739 * 6 = (4)(2+1)(8+5)(4) = (4)((2+1)+1)(3)(4)=4434.

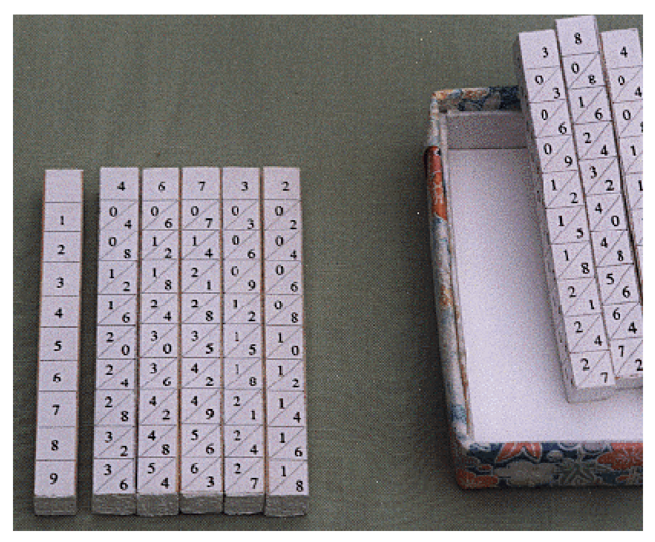
On lit aussi les autres produits partiels:

739 * 2 = (1)(4+0)(6+1)(8) = 1478,

739 * 3 = (2)(1+0)(9+2)(7) = 2217

et on peut obtenir le résultat par les additions décalées nécessaires

221700+14780+4434 = 240914 = 739*326.



Bien qu'il s'agisse là d'un dispositif fort simple, des variantes cylindriques circulaires ou des modifications évitant la réalisation des quelques additions furent créées et utilisées jusqu'à la fin du 19ème siècle.

2-6 : Diviser

Division : opération ayant pour but, connaissant le produit de deux facteurs et l'un d'eux, de trouver le facteur inconnu.

Les choses sont claires, il faut trouver par n'importe quel moyen, quelque chose d'inconnu… Supposons que l'on cherche le quotient de 739 par 26, la méthode la plus simple est encore de soustraire 26 un certain nombre de fois…

dividende	diviseur	quotient	diviseur × quotient	dividende	diviseur	quotient	diviseur × quotient
739	26	0	0	349	26	15	390
713		1	26	323		16	416
687		2	52	297		17	442
661		3	78	271		18	468
635		4	104	245		19	494
609		5	130	219		20	520
583		6	156	193		21	546
557		7	182	167		22	572
531		8	208	141		23	598
505		9	234	115		24	624
479		10	260	89		25	650
453		11	286	63		26	676
427		12	312	37		27	702
401		13	338	11		28	728
375		14	364				

Le résultat s'inscrit ici à la fin : $739 = 26 \times 28 + 11$.

Mais on peut procéder par paquets…. $739 = 700 + 39 = 70 \times 10 + 39$, or $70 = 26 \times 2 + 18$ donc $700 = 26 \times 20 + 180$ donc $739 = 26 \times 20 + 219$, etc.

En fait c'est ce que l'on fait lorsqu'on pose la division à la manière habituelle.

2-7 : La méthode égyptienne

Près de Thèbes, dans la vallée des Rois, au temps de Ramsès II, des pillards de tombe viennent de dévaliser un tombeau. Ils y ont dérobé 1476 objets et le chef des pillards se propose de répartir le butin entre ses onze hommes et lui-même. Il commence par inscrire 1 à gauche et 12 à droite puis il double chacun des nombres.

1	12 –
2	24 –
4	48
8	96 –
16	192 –
32	384 –
64	768 –

Il s'arrête à 768 car le double suivant dépasserait 1476. Arrivé à ce stade il cherche en opérant plusieurs essais dans la colonne de droite les nombres qui additionnés donneraient 1476 ; il retient donc 768, 384, 192, 96, 24 et 12 (il met un petit trait en face) et ajoute les nombres correspondants de la colonne gauche, soit 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 64, résultat : 123.

L'intérêt de la méthode est qu'il suffit de savoir multiplier par 2 et additionner. Si le résultat ne tombe pas juste on utilise des fractions.

De toutes manières il n'y aura aucune méthode simple jusqu'à l'apparition de la numération de position.

3. Des outils

3-1 : Tables à calcul et bouliers

Les premiers procédés d'aide au calcul n'utilisaient pas de matériel spécifiquement conçu à cet effet. Le premier procédé opératoire connu est le calcul sur les dix doigts de la main, qui est probablement à l'origine de l'utilisation du système décimal. C'est cependant l'utilisation du dénombrement à l'aide de bâtonnets ou de cailloux qui a permis le développement des premières constructions humaines servant à la simplification du calcul et du dénombrement.

Deux des premiers procédés opératoires sont des dérivés directs de l'utilisation de petits objets pour le calcul et la mémorisation des nombres au cours des opérations. Les tables à calcul furent développées probablement en Mésopotamie et n'étaient à l'origine que des lignes tracées dans le sable. On pouvait utiliser les colonnes ainsi formées pour donner différentes valeurs aux cailloux selon leur position. Les supports physiques de ces tables se diversifièrent: de la pierre à la terre cuite au bois ou au marbre. La plus ancienne table à calculer connue a été découverte dans l'île grecque de Salamine et est faite de marbre. Elle date approximativement du quatrième siècle avant J.C.

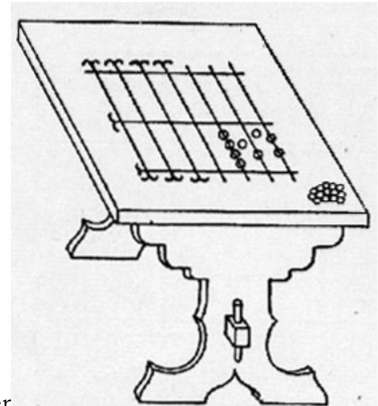
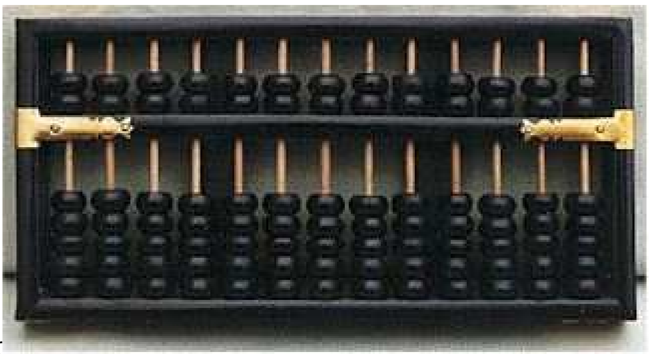


Table à calculer

Ce type de système donna naissance au calcul avec jetons qui fut utilisé couramment au Moyen-Âge, en Europe occidentale. On utilisait les jetons sur une table semblable à celle de ce dessin.

Les traits représentent dans l'ordre les deniers, les sols, les livres, les dizaines de livres, etc. On représente les nombres en positionnant sur chacune de ces lignes le nombre de jetons correspondant au chiffre associé à cet ordre de grandeur. Pour abréger la représentation, un jeton placé entre deux traits équivaut à 5 jetons placés sur le trait précédent. Les utilisateurs entraînés pouvaient réaliser de façon très rapide les opérations nécessaires pour la gestion et le commerce. L'enseignement de son utilisation était assez répandu, y compris dans tous les bons traités d'arithmétique de l'époque.



Boulier

Cependant, bien que fort utile pour les calculs commerciaux, le calcul avec jetons fut, pour les mathématiciens et astronomes, remplacé par l'utilisation du calcul écrit et les règles écrites de l'arithmétique. Le calcul avec jetons et le calcul écrit coexistèrent donc fort longtemps, car ce n'est qu'à la toute fin du 18ème siècle que l'on cessa d'utiliser les tables à calculer.

C'est une amélioration du procédé de calcul sur table qui donna naissance aux bouliers (environ 15ème siècle) : en fixant dans des rainures ou sur des tiges les menus objets utilisés avec les tables à calcul, on forme un outil de calcul autonome. De plus, cette disposition est aisément transportable.

Le boulier est un instrument qui permet des manipulations beaucoup plus rapides et efficaces que les tables car les pièces mobiles peuvent être déplacées par groupe. Les objets indépendants utilisés sur des tables doivent en effet être déplacés un par un, tandis qu'ici, on peut déplacer plusieurs billes d'un seul geste.

De plus, ces systèmes manuels permettent, pour un utilisateur expérimenté, l'entrée simultanée de plusieurs données et l'automatisme développé par son utilisation fréquente en fait, encore aujourd'hui, un outil rapide et couramment utilisé par bien des gens, principalement en Extrême-Orient.

> *En 1947, après la défaîte du Japon, un concours de calcul fut organisé entre un comptable du ministère des finances japonais et un comptable de la marine américaine. Le Japonais se servait de son boulier, l'Américain d'une machine à calculer électrique, équivalent un peu plus lent de nos machines modernes. Sur 11 manches de 10 calculs différents le Japonais en remporta 10 et l'Américain 1… La plupart des calculs de l'Américain s'avérèrent faux : mauvaise saisie des nombres…*

Sur le boulier
http://users.hol.gr/~helen/index.files/LE BOULIER.htm
http://www-cabri.imag.fr/nathalie/boulier/sommaire.htm

Sur les abaques
http://www.encyclopedie-universelle.com/abaque-menu.html

3-2 : Le mécanisme d'Anticythère

Beaucoup y ont déjà perdu la raison. Je crois que c'est ce qui nous guette tous..." Yanis Bitsakis, spécialiste du patrimoine culturel au département de physique de l'Université d'Athènes, ne cache pas sa stupéfaction devant la complexité du mécanisme antique dont, avec une trentaine d'autres chercheurs - astronomes, physiciens, mathématiciens, paléographes, historiens des sciences -, il tente de percer le secret.

L'histoire commence en 1900, près de l'île grecque d'Anticythère. Des pêcheurs d'éponges découvrent, dans l'épave d'un navire romain, 82 fragments de bronze corrodé. Un examen superficiel fait apparaître des roues dentées, présentant des graduations et des inscriptions astronomiques datées, d'après la forme des caractères, d'environ 80 avant J.-C. Les archéologues y voient les restes d'un astrolabe, instrument permettant de représenter la course des étoiles sur la voûte céleste et connu depuis le IIe siècle avant notre ère.

Dans les années 1950, les vestiges sont soumis à une désoxydation par électrolyse. Elle met au jour un appareillage de cadrans, d'axes, de tambours et d'aiguilles faisant penser, avant l'heure, aux horloges astronomiques de la Renaissance. Quelques farfelus y voient, à l'instar des statues de l'île de Pâques, la marque du passage d'une civilisation extraterrestre.

A l'automne 2005, une équipe de chercheurs des universités de Cardiff, d'Athènes et de Thessalonique décide de venir à bout de l'énigme. Un scanner à rayons X révèle, avec une précision de 50 microns et en trois dimensions, les moindres rouages de la machinerie. Plus de 2000 caractères grecs ou glyphes (symboles graphiques), gravés sur les pièces ou sur des fragments de feuilles de bronze, sont aussi déchiffrés.

Les conclusions de cette minutieuse enquête ont été publiées dans la revue *Nature* du 30 novembre 2006, au moment où se tenait, à Athènes, une conférence internationale sur "*la science et la technologie dans la Grèce ancienne*" (http://www.antikythera-mechanism.gr/).

On sait aujourd'hui que le mécanisme d'Anticythère, enchâssé dans un cadre en bois, se présentait sous la forme d'un boîtier haut de 34 cm, large de 18 cm et épais de 9 cm. Il était vraisemblablement actionné par une manivelle, ce qui rend impropre l'appellation d'horloge astronomique.

Sur sa face antérieure se trouvait un cadran comportant deux cercles gradués concentriques : le cercle intérieur, avec 360 divisions, représentait le Zodiaque grec ; le cercle extérieur, divisé en 365 jours, le calendrier égyptien en usage. A l'avant toujours était incrusté un calendrier astronomique permettant de calculer les positions du Soleil et de la Lune et, peut-être, celles des deux premières au moins des cinq planètes connues alors : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.

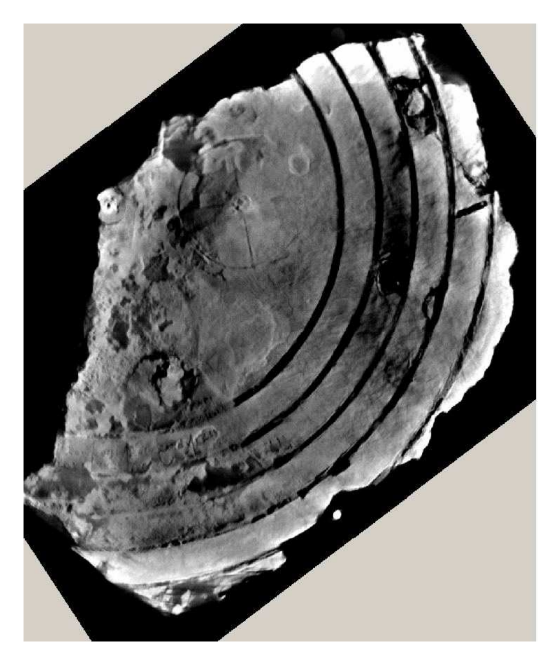
A l'arrière étaient disposés deux cadrans en forme de spirale, assortis chacun de cadrans subsidiaires. En haut étaient indiquées les périodes métonique (cycle de 19 ans, soit 235 lunaisons, au terme duquel les pleines et les nouvelles lunes reviennent au même jour de l'année solaire) et callipique (cycle, plus précis que le précédent, de 4×19, soit 76 ans). En bas était représenté le cycle de Saros, dont les 223 graduations, correspondant à autant de mois lunaires, marquent le laps de temps au terme duquel les éclipses lunaires et solaires se répètent. Un cycle déjà connu des Babyloniens, plusieurs siècles plus tôt.

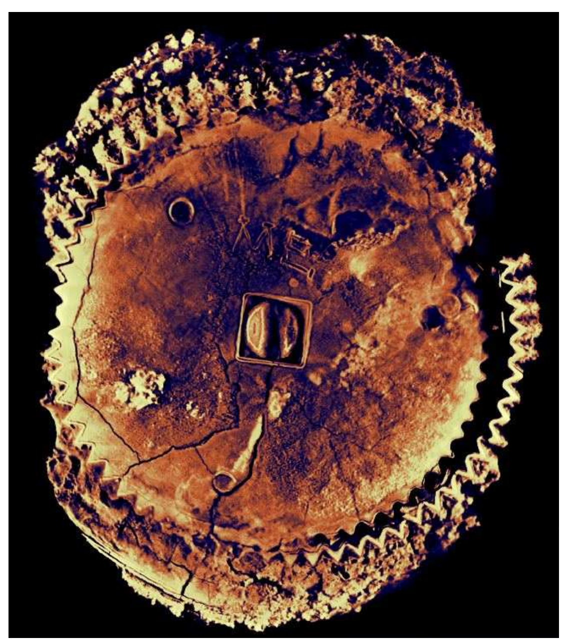
Quant aux inscriptions, qu'une datation plus précise a fait remonter à la seconde moitié du IIe siècle avant J.-C., elles constituent tout à la fois un traité d'astronomie et un mode d'emploi du dispositif.

" *Ce qui est prodigieux, c'est la sophistication de l'appareil et le fait que ces cycles soient "modélisés" grâce à un mécanisme,* s'enthousiasme Yanis Bitsakis*. Il faut attendre au moins un millénaire pour trouver son équivalent.*" Force est de reconsidérer ce que l'on pensait savoir de la science des Grecs, férus de mathématiques, de médecine et d'astronomie, mais, croyait-on, piètres techniciens. Le mécanisme d'Anticythère semble au contraire témoigner d'une culture technologique méconnue, faute de vestiges archéologiques.

On trouve du reste, chez Cicéron, la mention de systèmes similaires, provenant de l'école du philosophe Poseidonios de Rhodes. Le Moyen Age latin garde également la trace de quelques appareillages astronomiques. Ce qui fait dire au médiéviste Emmanuel Poulle, membre de l'Institut, que les horloges astronomiques qui ont fleuri entre le XIV[e] et le XVI[e] siècle sont "les filles d'Anticythère".

Le Monde du 1/12/2006





http://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_d'Anticyth%C3%A8re

3-3 : Règles à calcul

Parallèlement, l'invention des logarithmes par Napier a aussi permis la création d'un outil de calcul dont la longévité fut remarquable, la règle à calculer. Le premier progrès en ce sens a été réalisé en 1620, seulement 6 ans après l'invention des logarithmes, par Edmund Gunter. En fait, il eut l'idée de graduer avec une échelle logarithmique, une règle simple. Elle fut utilisée principalement par les marins, mais était difficile d'emploi. En effet, on devait utiliser un compas pour trouver les logarithmes des facteurs et réaliser les accumulations de ces logarithmes. Cependant William Oughtred eut, peu de temps après, l'idée de juxtaposer deux règles de Gunter permettant ainsi de simplifier son utilisation. La réglette centrale coulissante qui fut utilisée sur la plupart des règles jusqu'à environ 1970, fut imaginée, en 1657, par Seth Patridge.



Encore une fois, ce dispositif prit des formes diverses, du cylindre, au cercle, à un enroulement en hélice comme dans ce modèle de 1878 fait par G. Fuller, ou sous forme de réglettes juxtaposées à échelles fractionnées. Toutes ces tentatives visaient à allonger la partie utile de l'appareil, permettant ainsi d'en augmenter la précision.



Le plus court : http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_%C3%A0_calcul

Quelques liens intéressants et si vous voulez aller plus loin : http://machineacalculer.free.fr/favorite.htm

Une règle qui marche : http://www.oughtred.org/

3-4 : Nouveaux outils de calcul

Le texte qui suit est repris entièrement de

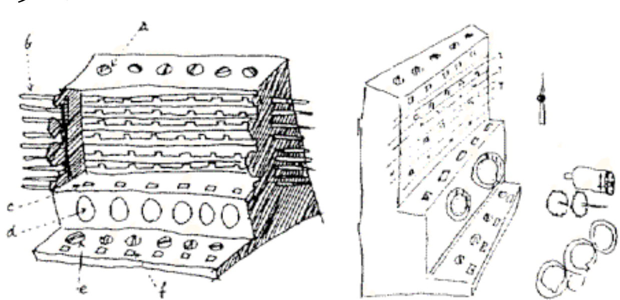
http://www.physique.usherbrooke.ca/~afaribau/essai/essai.html

Les calculatrices de poche et les ordinateurs sont aujourd'hui des outils des plus communs dont l'importance est indéniable. Bien évidemment, ces outils sont le résultat d'une longue évolution où se combine les progrès scientifiques et techniques. La recherche d'outils permettant la simplification des calculs est en effet une question qui préoccupe l'homme depuis qu'il sait dénombrer.

Si l'on fait abstraction, du controversé prototype de Leonardo Da Vinci, c'est au 17ème siècle que débuta la mécanisation du calcul numérique. Cette fusion du savoir technique et des arts de la pensée tels que l'arithmétique demandait de faire une abstraction importante de ces catégorisations sociales encore fermement établies. Cependant, le fait que les calculs devenaient de plus en plus nombreux et importants, particulièrement dans le domaine de l'administration, commençait à faire sentir que des aides au calcul plus sophistiquées pourraient avoir une grande utilité. C'est donc au cours de ce siècle que furent développées les trois premières véritables machines mécaniques automatisées de calcul numérique, soit celles de Wilhelm Schickard , de Blaise Pascal et de Gottfried Wilhelm von Liebniz .

La mécanique encore relativement simple de ces premiers modèles nous permet de décrire plus facilement les composantes essentielles à la mécanisation des opérations arithmétiques de base et ainsi d'apprécier les raffinements techniques principaux qui ont pu y être apportés par la suite. Pour cette raison, nous les décrirons dans plus de détails que les autres techniques discutées dans ce texte.

3-5 : Machine de Schickard



C'est en 1623, que fut peut-être construite la toute première machine à calculer mécanique. Cette réalisation est l'oeuvre de Wilhelm Schickard (1592-1635), un Allemand né d'une famille modeste. Au cours de sa vie, il fut d'une polyvalence remarquable, étant à ses heures, vicaire, enseignant de langues bibliques, cartographe, géomètre, astronome ou mathématicien.

Son intérêt pour l'astronomie et les mathématiques lui vient de sa rencontre en 1617 du célèbre astronome Johannes Kepler, avec lequel il a entretenu une longue correspondance. C'est d'ailleurs par l'intermédiaire de ces lettres, retrouvés par l'historien Franz Hammer que l'on connaît aujourd'hui l'existence de cette machine.

En effet, le seul exemplaire presque complété, qu'il faisait construire par Johann Pfister et qui était destiné à Kepler, a été détruit dans un incendie nocturne, moins de six mois après sa construction. Ce croquis ainsi que plusieurs explications contenues dans les lettres et d'autres notes destinées à Pfister, ont permis la construction en 1961 de plusieurs répliques fonctionnelles de ce que Schickard appelait l'horloge à calculer.

Malheureusement, ni Kepler ni Schickard lui-même ne semblaient avoir réalisé l'intérêt immense de cette machine, qui leur apparaissait probablement comme une amusante réalisation. De plus, le seul prototype ayant été détruit, cette invention demeura tout à fait inconnue jusqu'à la découverte des documents susmentionnés, en 1957.

3-6 : Machine de Pascal

La machine suivante fut construite par Blaise Pascal (1623-1652), un autre grand cerveau polyvalent. Le fait qu'il fut précédé par Schickard n'enlève rien au mérite de Pascal puisqu'il n'avait jamais eu connaissance des travaux de Schickard. De plus, il a su voir le grand intérêt des machines à calculer. En effet, Pascal construisit sa machine pour répondre à un besoin. Son père, Étienne Pascal, avait été envoyé à Rouen pour réorganiser les finances et la distribution des impôts en Basse-Normandie. Bien entendu, ce travail demandait de longs et nombreux calculs et c'est pour alléger la tâche de son père que Pascal, alors âgé de 18 ans, se mit à concevoir une machine mécanique permettant d'accélérer les processus de calcul. Une des difficultés de la construction d'une machine utilisable pour des calculs financiers vient du système d'unités monétaire en usage à l'époque. Il fallait donc un système mécanique permettant la retenue au douzième denier, au vingtième sol, à la dixième livre. Il conçut de nombreux mécanismes et en 1641, confia à un horloger de Rouen la réalisation d'un premier prototype, qui bien qu'élégant ne fonctionnait absolument pas. C'est donc en 1645 que sa première machine fonctionnelle fut présentée.

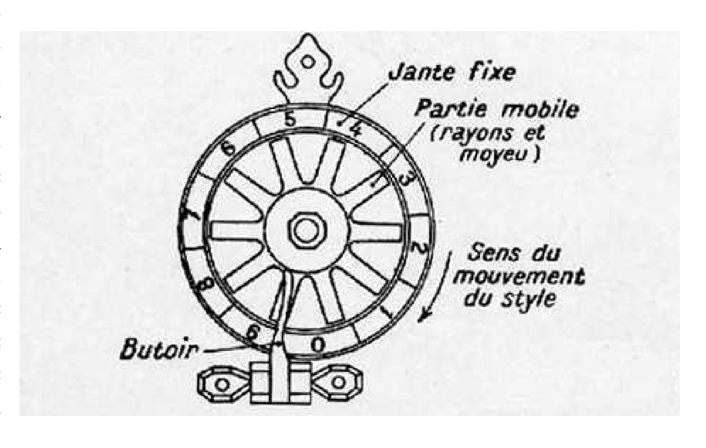
Le système d'inscription des diverses machines conçues par Pascal est similaire à celui utilisé par Schickard et nécessite l'utilisation d'un style. On l'insère entre deux rayons successifs du disque d'inscription, vis-à-vis

le chiffre à inscrire et on tourne dans le sens horaire jusqu'à un butoir. Chacun des ces disques est relié à une roue numérotée dont on peut voir le chiffre présentement inscrit au travers d'une lucarne.

Il existe cependant deux différences majeures entre le mécanisme de la machine de Pascal et celui de l'horloge de Schickard.



La première, et la plus importante, est au niveau du système de report lors de retenues. En effet, le système utilisé par Pascal est radicalement différent du système à roue mutilée. Il utilise plutôt un méthode de report à sautoir. Le sautoir (pièce centrale sur la figure) est soulevé au cours de la rotation de la roue B et lors du retour à 0 est relâché et retombe par gravité créant, par l'intermédiaire de la fourche du sautoir, une rotation d'une unité de la roue suivante A.

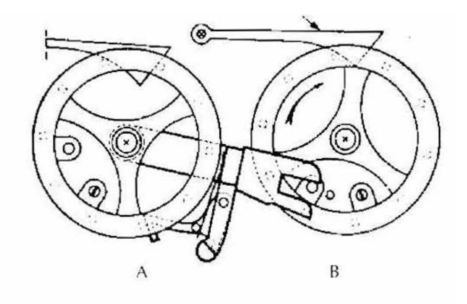


Ce système est facilement adaptable aux roues des sols et des deniers bien qu'ils ne soient pas en base 10. Les cliquets supérieurs ne servent qu'a éviter le retour en arrière des roues. Bien qu'il permette facilement la transmission des grandes retenues par sauts successifs, ce système demeure très sensible aux conditions d'utilisation. En effet, puisqu'il utilise son propre poids plutôt qu'un ressort, le sautoir est sujet à des rebondissements lors d'une utilisation rapide de la machine et le fait de ne pas être parfaitement à l'horizontale lors de l'utilisation peut perturber le fonctionnement la machine.

Cependant, ce système n'étant pas réversible, contrairement à celui, plus simple, de Schickard, la soustraction ne peut pas se faire par une utilisation en sens inverse de la machine. De là origine la deuxième différence entre ces machines. La solution à ce problème qu'a imaginé Pascal utilise simplement une numérotation complémentaire sur les roues numérotées (chiffres en sens inverse)

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

et un volet coulissant permettant d'afficher soit la série des nombres à l'avant (mode soustraction) ou celle à l'arrière (mode addition). Une addition se fait de la même façon que sur la machine de Schickard et le résultat se lit sur la chiffraison arrière.



Le reporteur de Pascal.

Pour réaliser une soustraction on place le volet en mode soustractif et on fait apparaître dans les lucarnes le premier nombre. On doit donc piquer comme si l'on voulait entrer (en mode addition) le complémentaire pascalien de ce nombre. Par exemple pour faire apparaître 003425 dans les lucarnes en mode soustraction on doit piquer comme pour entrer 996574.

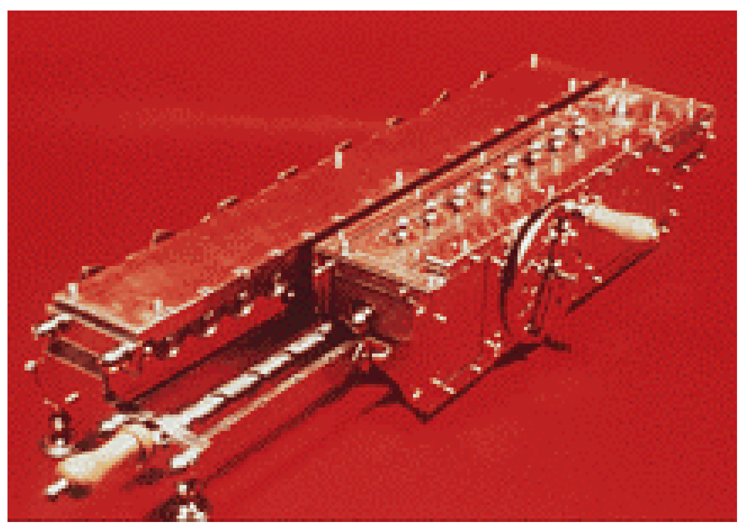
Ensuite, pour soustraire, disons 2436, on entre ce chiffre de la façon normale et dans les lucarnes on verra la différence 003425 − 002436 = 000989.

Pascal en fit construire plusieurs exemplaires (environ une vingtaine), dont neuf ont été retrouvés, et tenta de les vendre. Cependant, leur prix élevé et la faible demande ne lui ont pas permis le succès commercial qu'il aurait pu escompter. En effet, le calcul à jetons suffisait aux besoins de la comptabilité du temps. De plus, les calculs de nature scientifique impliquant des multiplications et des divisions, pour lesquelles la machine de Pascal n'était pas adaptée. Ces facteurs expliquent que peu de gens furent intéressés à acheter une de ces machines. Les exemplaires différaient selon leur utilisation : certains ne comptent que des entiers, d'autres possèdent les roues des sols et des deniers et enfin un autre modèle de géomètre comptait cinq roues pour les entiers ainsi qu'une roue pour les pieds, une pour les pouces et une pour les lignes.

3-7 : Machine de Liebniz

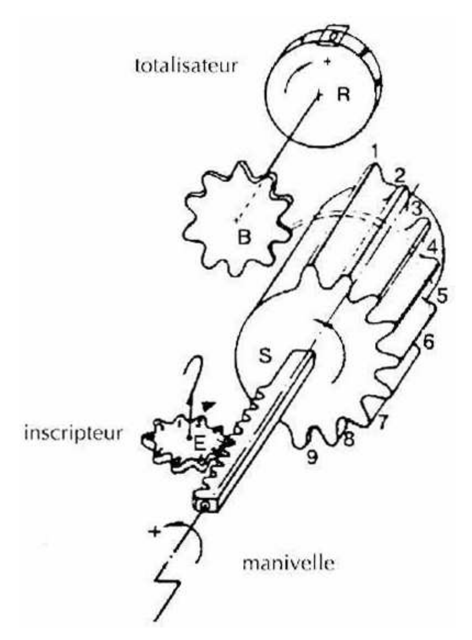
La prochaine étape qu'il y avait à franchir pour une mécanisation complète des calculs arithmétiques était de créer une machine capable de réaliser de façon automatique les multiplications et les divisions. C'est environ 30 ans après Pascal, en 1673 que le célèbre mathématicien Gottfried Wilhelm von Liebniz (1646-1716) commença à réfléchir au problème.

Cependant, ce n'est que 21 ans plus tard que le premier exemplaire fut construit, en raison de la grande difficulté de fabrication des pièces nécessaires à son fonctionnement. Il semble d'ailleurs qu'un artisan avec lequel il avait conclut un marché, le rompit en réalisant l'ampleur et la complexité de la tâche. Des deux ou trois exemplaires qu'il fit construire, seul le premier datant de 1694 nous est parvenu.



Tout le principe de fonctionnement de sa multiplicatrice repose sur le tambour à dents inégales combiné à l'utilisation d'un chariot mobile.

Tel que l'on peut le voir sur le dessin du mécanisme de la multiplicatrice, l'utilisation de l'inscripteur E permet de déplacer la position du tambour S par rapport à l'engrenage B. Or, puisque les 9 dents du tambour sont de plus en plus courtes, la position de ce tambour déterminée par l'inscripteur, permet de varier selon le chiffre choisi, le nombre de dents du tambour qui s'emboîtent avec la roue B et font, par conséquent tourner le totaliseur R. La machine contient 8 de ces tambours à dents inégales chacun étant relié à un cadran d'inscription qui lui est propre. De plus, cette partie de la machine est déplacable, pour que la série des 8 tambours puissent agir sur des séries différentes de totaliseurs, dont le résultat apparaît par des lucarnes.



Pour réaliser une multiplication, on procède de la façon suivante. Par exemple, pour multiplier 4326 par 365 on débute par placer la partie mobile à l'extrême droite et l'on pose manuellement sur les 8 cadrans de l'inscripteur (A) le multiplicande 00004326, les lucarnes indiqueront encore 000000000000.

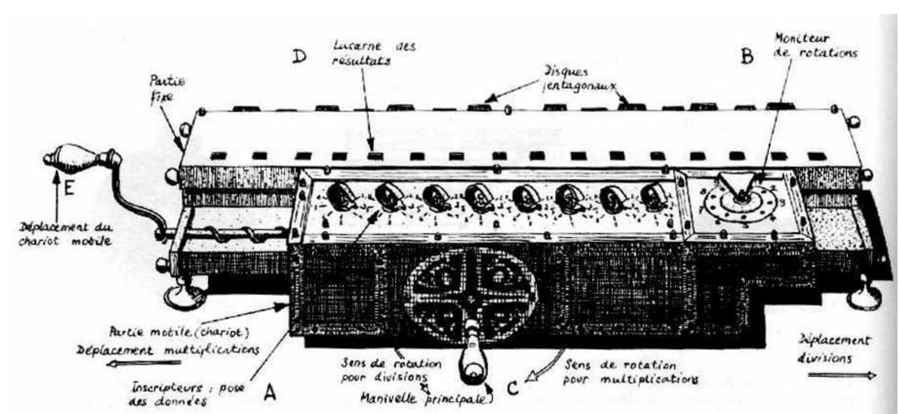
Ensuite, on pique un style dans le moniteur de rotation pour lui faire indiquer 5 (le chiffre des unités de 365). Le moniteur permettra de bloquer, après 5 rotations, la manivelle principale C. La position des tambours étant fixée par l'inscripteur, une rotation de la manivelle (et donc des tambours) ajoutera 6 dans la lucarne la plus à droite, 3 dans la suivante, puis 2 dans la troisième, 4 dans la quatrième et 0 dans toutes les autres. On tourne donc la manivelle jusqu'à son blocage (5 tours ici) ce qui affichera donc comme résultat intermédiaire :

$$4326+4326+4326+4326+4326 = 0000000021630.$$

Ensuite, on déplace le chariot mobile d'un cran vers la gauche, de façon telle que le tambour qui était aligné avec les unités, le soit maintenant avec le totaliseur des dizaines.

On pique maintenant la valeur 6 dans le moniteur de rotation et on tourne la manivelle jusqu'au blocage (6 tours cette fois). Ce faisant, on ajoute 6*4326=25956 au résultat, mais en position des dizaines. On ajoute donc 259560. Ensuite, on déplace encore une fois d'un cran vers la gauche, on pique le 3 et on tourne, ajoutant ainsi 3*4326*100=1297800 au résultat. On voit donc le résultat final

$$0000000021630 + 000000259560 + 000001297800 = 000001578990 = 365*4326.$$



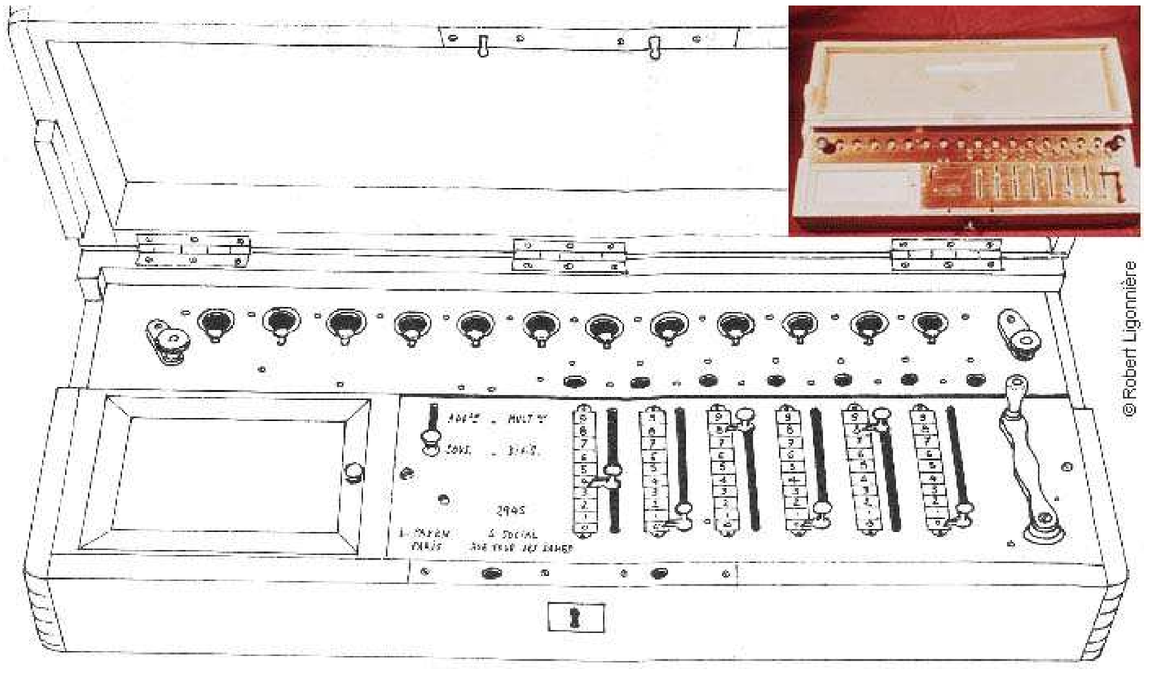
Cette mécanisation par additions successives utilise le chariot mobile de façon très proche, conceptuellement parlant, de la réalisation sur papier des multiplications en colonnes. Il est aussi possible de réaliser des divisions par des soustractions successives.

Cependant, Liebniz n'avait pas réussi à mettre au point un système de report efficace et a donc dû introduire une série de disques pentagonaux permettant à l'utilisateur de corriger les erreurs de report. Il n'en demeure pas moins que les principes de base du fonctionnement de sa multiplicatrice demeureront presque inchangés sur de nombreux modèles de machine à calculer, même jusqu'aux petites calculatrices manuelles de marque Curta, produites, à la fin des années 1930.

3-8 : Arithmomètre de Thomas

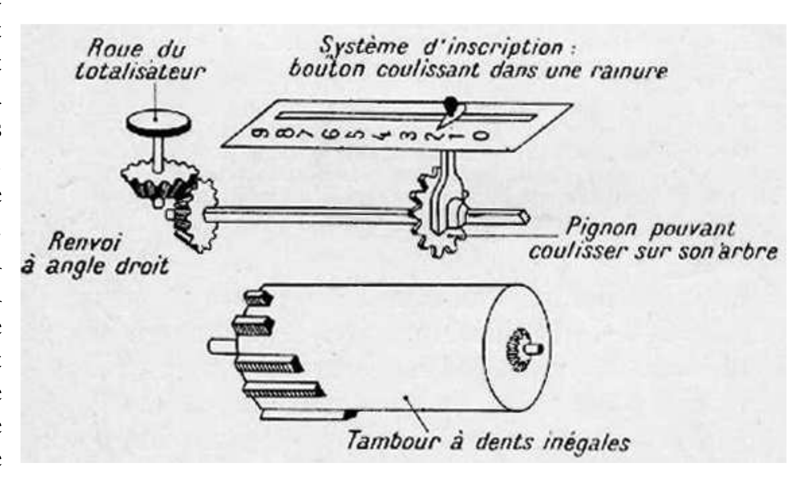
C'est donc en pleine révolution industrielle, aidé par les progrès techniques, que le français Charles-Xavier Thomas de Colmar réussit à fabriquer la première machine que l'on peut qualifier de véritablement pratique : l'Arithmomètre. Bien que quelques progrès mineurs aient eu lieu au cours du $18^{\text{ème}}$ siècle, les machines de Thomas, produites de 1821 à 1878, ont réellement marqué l'histoire du calcul mécanique en devenant les premières machines commercialisées de façon importante et ce, avec succès.

Bien qu'ils soient grandement inspirés de la machine de Liebniz, les Arithmomètres de Thomas intégraient de nouveaux mécanismes, le tout dans une machine pratique et d'une fiabilité inégalée auparavant.



Le principe de base des calculs repose encore sur l'utilisation d'un chariot mobile et d'un tambour à dents inégales similaires à celui de Liebniz, à la différence proche que l'inscripteur, maintenant composé de curseurs déplacables dans des rainures graduées, ne déplace plus le tambour en entier, mais plutôt un pignon relié au totaliseur. Il n'en demeure pas moins que c'est encore en variant le nombre de dents agissant lors d'un tour de manivelle que l'on réalise les opérations. Autre différence avec le modèle de Liebniz, c'est maintenant la partie contenant les lucarnes de lecture et les totaliseurs qui est mobile horizontalement, ce qui ne change rien au principe de fonctionnement.

Les ajouts faits par Thomas, sont tout de même importants. D'abord, l'ajout d'un mécanisme à crémaillère rendant simple l'effaçage des données (remise à zéro des indicateurs) était un ajout des plus pratiques pour les utilisateurs. Qui plus est, la création d'un système permettant l'inversion du mécanisme, facilite les opérations de soustraction et de division. Une autre amélioration intéressante est l'ajout d'une deuxième série de lucarnes qui, directement reliées à la manivelle, permet de compter les tours réalisés par cette dernière et donc d'afficher le multiplicateur.

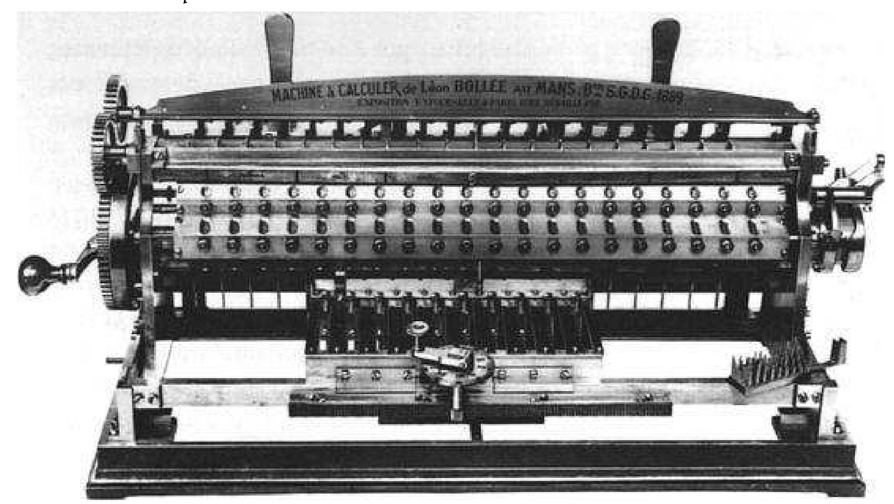


Lorsque la machine est utilisée pour une division, ces lucarnes affichent le quotient car, dans ce cas, c'est le diviseur qui est inscrit aux curseurs et le nombre de tours nécessaires (à chaque ordre décimal) à l'utilisateur pour obtenir un nombre plus petit que le reste détermine les différents chiffres du quotient. De plus, le système de blocage des roues que Thomas a mis au point était fort efficace, tout comme son système de report de la retenue, qui se faisait en cascade de façon irréprochable.

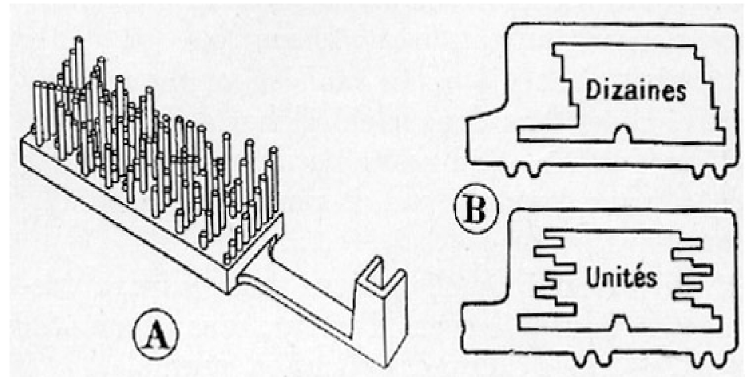
Il réussit à vendre près de 1500 exemplaires divers d'Arithmomètres dont 1000 entre 1865 et 1878. Ces machines, bien que dispendieuses pour l'époque, permettaient d'accélérer considérablement la réalisation des calculs et trouvaient preneur majoritairement dans des grandes entreprises, des banques, des compagnies d'assurance, mais encore relativement peu dans le domaine scientifique. Il est à noter que, bien que l'Arithmomètre soit grandement plus rapide qu'un homme entraîné pour réaliser les multiplications et divisions, au niveau de l'addition et de la soustraction, elle ne l'est guère. En effet, la nécessité de manipuler les curseurs pour l'inscription de chaque chiffre ralentissait considérablement l'opération.

3-9 : La multiplication directe

Malgré toutes ces améliorations rendant les machines plus pratiques et plus rapide, le principe de base de la multiplication mécanique n'avait pas évolué depuis la première multiplicatrice de Liebniz. On cherchait activement à accélérer la multiplication en trouvant une façon de réaliser la multiplication directe, c'est-à-dire pouvoir réaliser les produits partiels par un chiffre en un seul tour du mécanisme, plutôt que de procéder par additions succesives. En effet, si l'on crée une machine à multiplication directe la multiplication par, disons 4578, ne requiert que 4 tours (un par ordre décimal) plutôt que les 24 (8+7+5+4) préalablement requis.

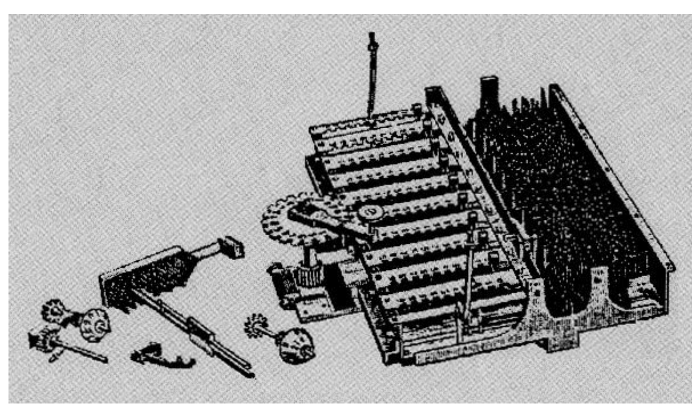


Bien qu'elle fut précédée par quelques autres machines qui eurent peu de rayonnement, c'est la machine construite par le français Léon Bollée, en 1888, qui fut vraiment la première réalisation pratique d'une machine à multiplication directe. Comme Pascal, Bollée construisit sa machine dans le but d'aider son père à réaliser les calculs qu'il devait faire pour son industrie.



Son principe de fonctionnement était radicalement différent de celui utilisé dans les autres machines de l'époque et vaut donc la peine d'être décrit brièvement. La machine de Bollée repose sur l'utilisation de plaques qui représentent de façon matérielle (par des tiges de longueur proportionnelle aux chiffres qu'elles représentent) la table de Pythagore. Chacune de ces plaques comprend donc une série de tige pour les unités et une pour les dizaines. L'organe multiplicateur comprend 10 de ces plaques qui peuvent être

déplacées d'avant en arrière à l'aide des curseurs d'inscription du multiplicande. De plus, elles peuvent aussi être déplacés latéralement grâce à un cadran qui permet d'inscrire les chiffres du multiplicateur. Lorsque l'on tourne la manivelle pour réaliser le produit partiel du multiplicande par le chiffre inscrit au cadran, l'ensemble des plaques est soulevé. De cette façon, les tiges situées à l'intersection des différents chiffres du multiplicande et de celui du multiplicateur inscrit au cadran, viennent déplacer des couples de crémaillières reliées au totaliseur. La longueur variable des tiges permet donc d'ajouter directement au totaliseur le produit partiel, en un seul tour de manivelle. Par la suite, on déplace le charriot mobile d'un ordre décimal, on inscrit au cadran le chiffre suivant du multiplicateur et en un tour de manivelle, on réalise le deuxième produit. Tel que décrit plus haut, cette façon de procéder réduit considérablement le temps nécessaire à la réalisation de la multiplication.



D'autres constructeurs, dont Otto Steiger et sa *Millionaire*, adopteront, à quelques modifications près, le principe développé par Bollée.

4. Arithmétique théorique

Faute de documents il est à peu près impossible d'étudier ce qui s'est passé avant Euclide. Mis à part les délires pythagoriciens, rien de bien passionnant n'apparaît alors, mis à part quelques travaux sur le pair et l'impair permettant la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. De même le concept de nombre figuré (nombre triangulaires, carrés, etc.) a joué un rôle important dans l'élaboration de procédés sommatoires : somme des entiers, des carrés des entiers.

Les nombres figurés plans que donne Nicomaque de Gérase dans son *Introduction arithmétique* au 2ème siècle de notre ère se retrouvent au 6ème siècle chez Boèce (*De institutione arithmeticae*) et pratiquement dans toutes les arithmétiques jusqu'à la Renaissance incluse. Malheureusement cette longue tradition s'accompaganit de la déplorable nomenclature grecque des rapports que l'on retrouve toujours aussi hermétique en musique. Savoir dire que le rapport de 5 à 24 est la raison sous quadruple – *surquadrupartientes quintes* – ne fait pas beaucoup avancer le schmilblick et est assez décourageant pour ne pas dire inhibant…

4-1 : Euclide

Les éléments d'Euclide contiennent une très belle et profonde exposition de l'arithmétique dans les livres VII, VIII et IX. Le livre VII développe d'abord une théorie des rapports rationnels, qui ne présente qu'une ou deux faiblesses quand à la rigueur de l'exposition. Le nombre y est considéré comme une grandeur, et les propriétés intuitives de l'addition y sont tacitement admises (existence, commutativité et associativité). Le caractère discret de l'ensemble $\mathbb{N}$ s'exprime par deux axiomes implicites principaux : l'unité mesure tout nombre, et tout ensemble d'entiers possède un plus petit éklément.

C'est ce dernier fait qui permet de trouver la plus grande commune mesure de deux nombres (le PGCD) au moyen de l'algorithme d'Euclide. Cet algorithme, instrument fondamental de l'arithmétique théorique, est d'ailleurs lié à la simplification approchée des rapports telle que l'ont pratiquée Archimède et Aristarque de Samos (env. 310 – 230 av. J. C.). Il est le point de départ de la théorie desfractions continues, qui joueront un si grand rôle au 18ème siècle.

On trouve encore au livre VII une théorie des nombres premiers entre eux et des nombres premiers absolus ; vient ensuite une courte étude du plus petit commun multiple. Le livre VIII est presque entièrement consacré aux nombres entiers en progression géométrique, soit aux puissances entières des fractions. Son but est d'établir d'une façon générale les cas de rationnalité des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un entier ou d'une fraction. A cet égard la notion de nombre rationnel n'est jamais explicitée, les fractions n'apparaissant que comme rapports ou *raisons* entre entiers.

Le livre IX comprend une partie vétuste sur le pair et l'impair, mais aussi des théorèmes fort subtils, dont l'un établit l'existence d'une infinité de nombres premiers et un autre la structure des nombres parfaits pairs.

Les Eléments sur le web.

En français, livres I, II, IV, V et VII :

http://jfgilles.club.fr/mathematiques/bibliotheque/euclide/index.html

En anglais la totalité :

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

En pdf traduction de 1804 :

http://panoramadesmaths.free.fr/telecharger/euclide_elements_1804.pdf

4-2 : Diophante

On ne connaît pas exactement la période où vécut Diophante d'Alexandrie : on le situe entre 150 avant notre ère et 350 après… la date la plus probable étant le milieu du 3ème siècle de notre ère. Son œuvre, intitulée « L'Arithmétique » comportait treize livres dont six ont été transmis par les Arabes. Quatre autres ont été retrouvés en Iran en 1972. C'est un ouvrage qui se rapporte davantage au courant de la logistique (le calcul chez les grecs) qu'à celui de l'arithmétique euclidienne. Cependant comme les problèmes traités ne comportent que des données et des solutions en nombres rationnels, il s'appuie souvent sur les propriétés spécifiques des entiers.

C'est un algébriste qui a traduit ces livres en arabe au 10ème siècle, ce qui explique la manière dont les arabes ont majoritairement lu Diophante et utilisé l'outil algébrique pour résoudre les problèmes diophantiens. Un autre courant, initié en particulier par al-Khazin a développé une arithmétique entière sans algèbre.

Bombelli incorpore des problèmes de Diophante dans l'édition de *l'Algebra* de 1572. En Allemagne, à la même époque, Xylander publie une traduction en latin de Diophante (1575). Enfin, Bachet de Méziriac donne en 1621 une édition bilingue en grec et en latin de ces six livres retrouvés. C'est cette édition que lit et annote Fermat.

4-3 : La Chine

La civilisation chinoise a laissé des travaux arithmétiques, dont le célèbre théorème des restes, dont le nom vient du problème 26 du chapitre 3 du *Sunzi Suanjing* (Manuel Mathématique du Maître Sun) datant environ du quatrième siècle de notre ère. On y trouve des règles de résolution sans explicitation des démonstrations.

4-4 : Le 17ème siècle, Bachet et Fermat

En 1621 Bachet donna la première édition gréco-latine de Diophante avec un copieux commentaire. Il vérifia pour les 325 premiers entiers qu'ils sont bien la somme de quatre carrés au plus (*th. de Bachet*). D'autre part dans ses *Problèmes plaisans et délectables* de 1624 il montra que si a et b sont premiers entre eux il existe x et y tels que $ax+by=1$. Il établissait cette importante relation grâce à l'algorithme d'Euclide.

Fermat, lisant Diophante dans l'édition de Bachet, alla beaucoup plus loin ; citons ses principales découvertes (rarement démontrées de manière correcte) :

Le « petit » théorème de Fermat : pour tout nombre premier p et tout entier a non divisible par p, $a^p - a$ est divisible par p (démonstration correcte d'Euler).

L'équation de Fermat : l'égalité $x^2 = Ay^2 + 1$ a, pour tout A entier positif non carré parfait, une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}$.

Les nombres de Fermat : ce sont les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$, soit 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297, … dont il croyait qu'ils étaient premiers. Mais 4 294 967 297 ne l'est pas (Euler) : 641 × 6 700 417 ; on ne sait pas s'il existe d'autre nombre de Fermat premier (voir des détails sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Fermat).

Le « grand » théorème : pour tout entier n, $n > 2$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution (non triviale) dans $\mathbb{Z}$ ($n = 4$: Fermat, $n = 3$: Euler, puis S. Germain, E. Kummer, etc., démonstration finalisée par A. Wiles en 1994).

Etude des formes quadratiques simples, démonstration par descente infinie (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

4-5 : Le 18ème siècle, Euler et Lagrange

Les mathématiciens de ce siécle se sont plutôt intéressés à l'analyse et à l'algèbre, aussi la théorie des nombres n'y tient qu'une petite place, à part dans les travaux d'Euler. Il démontre tout d'abord le « petit » théorème de Fermat en 1736 (il connaissait les travaux de Fermat par l'édition qu'en avait faite son fils Pierre-Samuel) et le généralise en 1760 en introduisant la très importante fonction φ (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

Euler trouve que le 6ième nombre de Fermat $2^{2^5} + 1$ est composé ; il est proche de la démonstration du théorème de Bachet qui ne sera faite que par le mathématicien français Joseph-Louis Lagrange en 1770 ; Euler reprend néanmoins cette démonstration en 1773 et l'améliore notablement.

Il s'intéresse également aux formes quadratiques $ax^2 + bxy + cy^2$ où tous les termes sont dans $\mathbb{Z}$ et prépare l'étude des congruences. Il s'intéresse également au « grand » théorème de Fermat qu'il démontre pour $n = 3$ et $n = 4$ et dont il perçoit la grande difficulté. Enfin on peut regarder Euler comme le fondateur de la théorie analytique des nombres : en fait il utilise les propriétés des nombres réels, essentiellement en analyse, pour démontrer des propriétés des entiers. Un de ses travaux les plus remarquables porte sur la fonction Zéta (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) qui apparaît dans l'*Introductio in analysis infinitorum* (1748). On y trouve également l'égalité asymptotique $\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{p \le x} \frac{1}{p} = \ln(\ln x)$. Lagrange quand à lui s'intéressera surtout aux formes quadratiques et aux fractions continues. Il démontre le théorème de Wilson (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) ainsi que celui de Bachet.

4-6 : Le 19ème siècle

Les deux grands noms du début de la période sont Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) qui débute en 1794 et dont l'œuvre maîtresse est la *Théorie des Nombres* de 1830. Cet ouvrage reste important à consulter et là encore les fractions continues jouent un rôle important ; le principal résultat nouveau et immédiat est celui sur la réciprocité quadratique : déterminer les restes des carrés modulo p (1785, voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Il développera les premiers calculs de congruence à cette époque. Dans un autre registre Legendre va s'intéresser aux intégrales elliptiques puis aux fonctions elliptiques qui jouent maintenant un rôle majeur dans toutes les questions de théorie analytique des nombres.

Le même type de problème va intéresser Carl-Friedrich Gauss (1777 – 1855) qui écrit Disquisitionnes arithmeticae en 1801 : cet ouvrage contraste fortement avec celui de Legendre car empli d'une rigueur nouvelle. Tous les mathématiciens du 19ème siècle s'en inspireront et il reste une référence utile. On y ttouve la première étude correcte des congruences, premier exemple de relation d'équivalence, si utile de nos jours. La loi de réciprocité quadratique sera également un de ses dadas puisqu'il en donne six démonstrations différentes ; cela débouchera également sur une étude intense des formes quadratiques.

Legendre et Peter-Gustav Lejeune-Dirichlet prouvent le grand théorème de Fermat pour $n = 5$ en 1825, Gabriel Lamé pour $n = 7$ en 1840, mais Gauss, en étudiant l'ensemble des complexes $a+ib$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$, couple ces nombres avec les résidus quadratiques et ouvre la voie des recherches de Ernst Eduard Kummer (1810 – 1893) qui créera les *nombres idéaux* en 1844. Ces derniers permettront de montrer le théorème pour beaucoup d'entiers, mais surtout ouvrent de nouveaux débouchés avec l'étude des *corps de nombres algébriques*.

Dans le domaine de la théorie analytique, une des grandes questions, posée par Legendre et travaillée par Gauss, Tchebychev, Riemann, est celle de la répartition des nombres premiers : a-t-on un moyen de savoir s'ils restent toujours aussi nombreux ou pas. les calculs numériques (faits à la main) a occupé beaucoup du temps de tous et on a abouti au fameux « théorème des nombres premiers ».